**DEVOIR MAISON VI**

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

### Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité.

On désigne par $c$ un réel strictement positif et on considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

**1.** Montrer que $f$ peut être considérée comme une densité.

*On considère dans la suite une variable aléatoire $X$ de densité $f$ et on note $F$ sa fonction de répartition. On dit que $X$ suit la loi de Pareto de paramètre $c$.*

**2.** Déterminer, pour tout réel $x$, l'expression de $F(x)$ en fonction de $x$ et $c$.

**3.** Soit $t$ un réel strictement supérieur à 1 .

**a.** Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $P_{(X>1)}(X \leqslant tx)$.

**b.** En déduire que la loi de $\frac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de $X$.

### Partie 2 : réciproque de la propriété précédente.

On considère une variable aléatoire $Y$ de densité $g$ nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note $G$ la fonction de répartition de $Y$.

Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel $t$ strictement supérieur à 1 , on a :

- $P(Y > t) > 0$.
- La loi de $\frac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y > t)$, est la loi de $Y$.

On veut alors montrer que $Y$ suit la loi de Pareto de paramètre $c$.

**4.** Justifier que $G(1) = 0$.

**5. a.** Établir l'égalité :

$$\forall x \geqslant 1, \forall t > 1, G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

**b.** Justifier que $G$ est de classe $C^1$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x > 1, \forall t > 1, G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

*Date*: 4 Février 2025.
http://louismerlin.fr.

**c.** Montrer enfin la relation :

$$\forall t > 1, G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1$$

**6.** Dans cette question, la lettre $y$ désigne une fonction de classe $C^1$ sur $]1, +\infty[$ qui, à tout réel $t$ de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$.

On note $(E_1)$ l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 0$ et $(E_2)$ l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 1$.

Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

**a.** Soit $z$ la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que $y$ est solution de l'équation différentielle $( E_1 )$ si, et seulement si, $z$ est constante sur $]1, +\infty[$.

**b.** En notant $K$ la constante évoquée à la question **6.a**, donner toutes les solutions de $(E_1)$.

**c.** Trouver une fonction $u$, constante sur $]1, +\infty[$, et solution de l'équation différentielle $(E_2)$.

**d.** Montrer l'équivalence : $h$ solution de $(E_2) \Leftrightarrow h - u$ solution de $(E_1)$.

**e.** En déduire que les solutions de l'équation différentielle $(E_2)$ sont les fonctions $h$ définies par :

$$\forall t > 1, h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

**7. a.** Montrer finalement que l'on a :

$$\forall t > 1, G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

**b.** Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$ puis conclure quant à la loi de $Y$.

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c.

**8.** On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que $Z$ est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que $X$. On note $H$ sa fonction de répartition.

**a.** Pour tout réel $x$, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction $F$.

**b.** En déduire que $Z$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

**c.** Écrire une fonction Python d'en-tête `def simulX(c)` et permettant de simuler $X$.